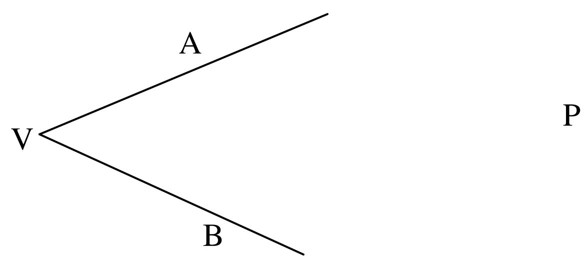
703. D’Amore B., Marazzani I. (2009). Un concetto dall’apprendimento complesso, l’angolo. In: D’Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2009). *Pratiche matematiche e didattiche in aula*. Atti del Convegno Nazionale “Incontri con la matematica” n. 23. Castel San Pietro Terme, 6-7-8 novembre 2009. Bologna: Pitagora. Pag. 268. ISBN: 88-371-1779-6. 115-117.

Un concetto dall’apprendimento complesso, l’angolo

Bruno D’Amore - Ines Marazzani
NRD, Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna

Le riflessioni che presenteremo nel corso del seminario hanno come tema la complessità della costruzione cognitiva di un oggetto della matematica, l’angolo; esse sono il risultato di un lavoro di ricerca svolto nel 2008 (D’Amore, Marazzani, 2008).
Normalmente, gli oggetti della matematica hanno di solito varie definizioni che la storia ha elaborato; a volte, per motivi diversi, una di esse si impone, ma non per questo le altre spariscono. Ciascuna definizione tende a cogliere di quell’oggetto particolarità specifiche. Da un punto di vista logico, una definizione è l’unità linguistica minima essenziale che si può considerare come necessaria e sufficiente per identificare in modo univoco l’oggetto: le altre si ricavano con dimostrazioni opportune.
Ma la storia insegna che non sempre è così. Nel caso dell’angolo, come vedremo, le diverse definizioni che la storia ci ha consegnato sono addirittura spesso essenzialmente diverse, tanto che si può ipotizzare che l’oggetto “angolo” è l’insieme delle caratterizzazioni che ciascun definizione evidenzia.
Dunque, alla classica imbarazzante domanda se il punto P appartiene o no all’angolo AVB nel caso della rappresentazione semiotica seguente:



la risposta più corretta è: Dipende da come si definisce l'angolo; in molte definizioni, la risposta è negativa; in altre è positiva; in altre la domanda non ha neppure senso. Ovviamente questa considerazione vale per tutti gli oggetti matematici; per esempio, in Sbaragli (2003) si studia l'oggetto "punto".
Se si va per Paesi e per scuole, può essere utile sapere che, mentre in Italia domina attualmente la definizione che chiama in causa la parte di piano (illimitata) compresa tra due semirette che hanno in comune l'origine, in altri Paesi, specie americani, anche nella scuola primaria, domina quella di Hilbert, che concepisce l'angolo come il sistema delle due semirette.
Se una delle definizioni fosse epistemologicamente più conveniente, o più facile, o più vicina all'identità di quell'oggetto…, allora si dovrebbe fare di tutto per proporla e renderla universale; nel caso dell'angolo, però, ognuna delle definizioni che la storia ha elaborato presenta dei problemi addirittura di accettazione intuitiva.
È certamente interessante, come abbiamo evidenziato nella nostra ricerca, che *tutte* le definizioni che la storia ha creato sono contemporaneamente presenti, a livello intuitivo, fra gli studenti intervistati: a fronte di un oggetto matematico unico, si vede come esistano varie interpretazioni e vari modelli che tendono a rappresentare caratteristiche di quell'oggetto.
La scelta in àmbito scolastico porta ad una terna che sempre viene esaminata quando si discute di trasposizione didattica:

- il Sapere (l'angolo, nelle sue diverse accezioni) da un punto di vista matematico vero e proprio;
- quel sapere che viene scelto in aula dall'insegnante come sapere da insegnare;
- quel sapere personale che ciascun allievo basa sulla propria esperienza, un sapere sul quale è necessario fondare ogni studio relativo alla trasposizione didattica.

A volte, i saperi in gioco possono essere addirittura contrastanti; per esempio quando ingenuamente l'insegnante crede che vi sia una sola concettualizzazione possibile dell'oggetto matematico e, di conseguenza, una sola definizione, quella in suo possesso.
Occorre dunque relativizzare le attese degli insegnanti; può darsi che la definizione proposta istituzionalmente in aula contrasti con l'immagine intuitiva che lo studente si è già costruito, grazie ai contesti d'uso esterni alla scuola. Nel proporre una definizione, occorre dunque vagliare bene le difficoltà che avrà lo studente a cancellare o a superare la propria immagine intuiva, forse già modello, e sostituirla con quella proposta dall'insegnante.
Occorre relativizzare anche la ricerca didattica e non credere dunque che eventuali risposte "errate" alle richieste che prevedono implicitamente un unico modello siano davvero "errate" e non siano invece, in modalità assai più interessante, l'evidenziazione di un conflitto tra un modello intuitivo già formato e quello che gli si tenta di opporre.

Un approccio pragmatista costringe a relativizzare proposte e risposte: è allo stato attuale il miglior veicolo filosofico possibile; la scelta di un atteggiamento realista porta difficoltà didattiche a non finire (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003).
Se è vero che la definizione di un oggetto matematico dovrebbe essere il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratiche, occorre allora che ciascuno dei componenti la comunità porti il suo contributo personale, secondo le proprie convinzioni, negoziando i saperi nella microsocietà classe e giungendo, auspicabilmente, ad un sapere condiviso. Sottolineiamo la parola "ciascuno" perché attualmente le scelte relative alle definizioni degli oggetti matematici e alle rappresentazioni semiotiche attraverso le quali vengono mostrati individuano intese che non sempre vedono coinvolti i soggetti che devono disambiguare la rappresentazione e oggettivare l'oggetto, ma solo coloro che tentano una trasposizione; non sono i soggetti in fase di apprendimento che vengono chiamati a intendersi a proposito di una rappresentazione, ma individui competenti che non hanno più bisogno di rappresentazioni per poter oggettivare l'idea. «L'oggettivazione dell'oggetto significa riflessione sull'oggetto secondo le forme dell'attività matematica: l'oggetto appare come ri-flessione nella coscienza individuale di ciò che è *già* iscritto nella cultura» (Radford, 2005).
Il soggetto che ha interesse a disambiguare non è coinvolto nella scelta e subisce le scelte fatte da chi si occupa di trasposizione del sapere. Non possiamo affermare, quindi, che il sapere, oggetto della discussione in una classe intesa come comunità di pratiche, sia sempre realmente condiviso. Possiamo supporre invece che sia il risultato di una mediazione fatta dall'insegnante che vuole condurre i propri allievi verso quel sapere condiviso dagli adulti, dagli insegnanti, dai matematici, da adulti appartenenti ad una determinata cultura e che personalmente condivide e che il soggetto in fase di apprendimento sia tenuto a debita distanza da tali negoziazioni.
Che sugli angoli vi siano modelli totalmente differenti in gioco era secondo noi implicito in molte delle celebri ricerche didattiche sugli angoli, ma qui abbiamo toccato con mano il senso e ulteriori ragioni di queste difficoltà, che la ricerca ha evidenziato da decenni. Il problema non si risolve scegliendo una definizione ed imponendola per poi meravigliarsi quando il concetto non è costruito, ma cercando le condizioni di partenza di ciascuno studente, condizioni la cui varietà, qui testimoniata in senso sincronico, è di grande interesse anche diacronico.

Bibliografia

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia,

Università di Cipro, 22 giugno –-6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.
D'Amore B., Marazzani I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica.* 3, 285-329.
Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.
Sbaragli S. (2003). La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica*. 47. 49-58.

Parole chiave: oggetti matematici; rappresentazioni spontanee; oggettivazione.